**Вступ**

Метод скінченних елементів – потужний алгоритм для чисельного розв’язування лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Вони виникають в задачах механіки, гідродинаміки, теплопровідності, електромагнетизму, акустики, оптики та інших областях науки та техніки. Саме цей метод використовується в програмах FlexPDE та Comsol Multiphysics.

Для моделювання чисельних задач необхідне знання фізичних законів. Дуже важливим є правильний підбір чисельних параметрів. Нерідко зустрічається ситуація, коли для однієї речовини програма рахує правильно, а для іншої – розбігається, або видає нефізичний результат. Тому отриманий розв’язок обов’язково потрібно проаналізувати. Для цього необхідно застосовувати знання, отримані в загальному курсі фізики. Частина задач була представлена в таких розділах фізики, як математична фізика [1], електродинаміка [2,3], квантова механіка [2], їх аналітичні розв’язки відомі й можуть бути використані для перевірки правильності отриманих чисельно результатів.

Даний посібник є збірником задач, які потрібно розв’язати за допомогою FlexPDE або Comsol Multiphysics. Текст складається зі списку завдань, умовно розбитих по практичних заняттях, тем доповідей та рефератів, орієнтовного переліку змодельованих задач та літератури. У кінці посібника розібрані приклади з вказівками та підказками до кожного заняття.

Дана розробка орієнтована на студентів спеціалізації «теоретична фізика» фізичного факультету.

**Заняття 1.** Допоміжні задачі для FlexPDE з курсу математичного аналізу.

1. Порахувати суму ряду до , порівняти з . Результат вивести на графіку.

1.1 , .  
1.2 , .

1.3 , .

1.4 , , .  
1.5 , , .  
1.6 , ,.  
1.7 , .  
1.8 , .

1.9 , ,.

1.10 , , .

2. В 2d створити область із застосуванням всіх засобів побудови: пряма, коло, еліпс, сплайн, а також вирізати і додати підобласті. Використати вбудовані команди програмного пакету.

**Заняття 2.** Задачі на власні функції та власні значення.

Знайти власні функції та власні значення оператора Лапласа для :

1. Прямокутника з однорідною умовою Діріхле на сторонах.
2. Круга з однорідною умовою Діріхле на границі.
3. Сфери.
4. Плоскої фігури довільної форми з умовою Діріхле на границях.
5. Круглого циліндра з однорідними межовими умовами: на бічній поверхні − Діріхле, на основах − Неймана.
6. Кулі з однорідними межовими умовами Діріхле.
7. Циліндричної оболонки висотою Н з умовою Діріхле на границях.
8. Прямокутника з однорідною умовою Неймана на сторонах.
9. Круга з однорідною умовою Неймана на границі.
10. Кулі з однорідними межовими умовами Неймана.

**Заняття 3.** Розв’язання задач з основних розділів математичної фізики. Стаціонарні задачі.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластині, якщо ліва сторона її підтримується при температурі , права – при температурі , верхня – при нульовій температурі, а нижня теплоізольована.
2. Знайти електростатичний потенціал всередині області, обмеженої провідними пластинами , якщо пластина заряджена до потенціалу , а інші – заземлені. Заряди всередині області відсутні.
3. Знайти стаціонарний розподіл температури в тонкій однорідній прямокутній пластині, яка рівномірно по площі нагрівається стаціонарним зовнішнім джерелом заданої потужності, якщо температура країв пластини підтримується рівною .
4. Знайти розподіл електростатичного потенціалу в нескінченній смузі , на лівій стороні якої потенціал дорівнює нулю, а на правій приймає значення . Вибрати розмір області по *у* в залежності від величини параметру *α*.
5. Знайти розподіл електростатичного потенціалу всередині прямокутного паралелепіпеда з провідними стінками, якщо його бічні грані та верхня основа заземлені, а нижня основа заряджена до потенціалу .
6. Розв’язати рівняння Лапласа всередині кругового сектора *,* якщо на стороні потенціал приймає значення *,* а на інших − нульове значення.
7. Розв’язати рівняння Лапласа всередині кругового сектора *,* якщо на стороні потенціал приймає значення *,* а на інших − нульове значення.
8. На плоскій поверхні землі встановлений довгий ангар, що має форму половини циліндра радіусом (циліндр розділено по площині, що проходить через його вісь).Перпендикулярно осі ангара в горизонтальному напрямку дме вітер зі швидкістю **.** Вважаючи його потоком ідеальної нестисливої рідини, знайти розподіл потенціалу швидкості потоку та поле швидкостей. Потенціал пов’язаний з полем швидкостей співвідношенням і задовольняє рівняння Лапласа.
9. Знайти електростатичний потенціал, що задовольняє рівняння Пуассона в області, що є зовнішньою до круга радіуса , якщо на межі області нормальна складова напруженості поля дорівнює нулю, а на нескінченності потенціал прямує до нуля.
10. Радіус однорідного циліндра , висота ; його бічна поверхня підтримується при нульовій температурі, а верхня основа теплоізольована. Знайдіть розподіл температури, що встановися у циліндрі, якщо на нижній основі підтримується заданий розподіл температури .
11. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластині, дві суміжні сторони якої підтримуються при температурі , а через дві інші подаються теплові потоки та відповідно.

**Заняття 4.** Розв’язання задач з основних розділів математичної фізики. Нестаціонарні задачі.

Підібрати параметри самостійно. Вказати розмірності (за потреби).

1. Знайти розподіл температур у товстостінній трубі (внутрішній радіус дорівнює , зовнішній − ), якщо через її внутрішню поверхню подається рівномірно розподілений тепловий потік густиною , а через зовнішню – . Початкова температура труби .

2. Знайти поле температур та його зміну з часом всередині однорідної кулі радіуса , яка мала температуру а з початкового моменту часу на її поверхні підтримується стала температура .

3. Знайти розподіл температури і густини потоку тепла в циліндрі висотою *H*, якщо його радіус змінюється вздовж стержня за законом , бічна поверхня теплоізольована, через нижню поверхню подається сталий тепловий потік , а верхня підтримується при сталій температурі , що дорівнює температурі стержня при

4. Ліва сторона пластини підтримується при температурі , інші сторони — теплоізольовані. Знайти розподіл температур у пластині при , якщо в початковий момент часу розподіл температур вздовж стержня описувався виразом: .

5. Однорідне середовище обмежене нескінченною циліндричною поверхнею радіуса . Через поверхню подається неоднорідно розподілений стаціонарний тепловий потік заданої величини, причому в напрямі осі циліндра густина потоку є сталою. Знайти розподіл температури в середовищі, якщо початкова температура *.*

6. Однорідний тонкий диск радіуса *а*, що мав температуру при *0*, однорідно по площі нагрівається стаціонарним потоком світла інтенсивності , яке повністю поглинається диском. Знайти зміну поля температур у диску при , якщо край диска підтримується при температурі .

7. Ліва сторона пластини теплоізольована, інші сторони підтримуються при температурі . Знайти розподіл температур в пластині при , якщо в початковий момент часу розподіл температур був

8. Коливання стержня змінної жорсткості. Тонкий стержень виготовлений з неоднорідного матеріалу, так що модуль Юнга змінюється вздовж стержня за законом де – деяка точка, що лежить поза межами стержня. Густина матеріалу та площа перерізу стержня постійні. розв'язати задачу про коливання стержня, якщо початкова швидкість , а початкове відхилення дорівнює нулю. Розглянути випадки: а) обидва кінці стержня закріплені нерухомо; б) один кінець закріплений нерухомо, а інший – вільний.

9. Знайти коливання струни лівий кінець якої закріплений, а правий вільний, при *0* під дією розподіленої сили . При *0* струна перебувала в положенні рівноваги. Розглянути частинний випадок .

10. Скільки потрібно часу, щоб зварити яйце не круто, якщо помістити його в киплячу воду. Нестаціонарна задача теплопровідності в циліндричній системі координат. Фізична модель задачі розглянута в кінці посібника.

11. Знайти коливання пружного стержня, якщо правий кінець його закріплений нерухомо, а до лівого при *0* прикладена сила . При  *0* стержень перебував в положенні рівноваги.

**Заняття 5-6.** Задачі з класичної електродинаміки. Електро- та магнітостатика.

Числовий розв’язок порівняти з результатом, отриманим за допомогою аналітичних розрахунків.

1. Знайти магнітне поле лінійного струму.
2. Знайти електричне поле, яке створює точковий заряд в анізотропному середовищі. Дослідити як змінюються лінії напруженості електричого поля в залежності від вигляду тензора діелектричної проникності середовища.
3. Анізотропна пластинка поміщена в однорідне електричне поле, направлене під кутом до поверхні пластинки. Знайти напруженість електричного поля всередині пластинки.
4. Знайти магнітне поле, яке створює кільце зі струмом.
5. Визначити потенціал і напруженість електричного поля, яке створює рівномірно поляризована куля.
6. Знайти індукцію магнітного поля створене площиною, по якій тече однорідний електричний струм.
7. На межі поділу двох діелектриків заданий поверхневий розподіл зарядів. Знайти електричне поле.
8. Знайти потенціал точкового заряду , який знаходиться поблизу провідної заземленої (ізольованої) кулі, радіусу *.*
9. Всередині циліндричного провідника радіусу , є циліндрична порожнина радіуса . Вісі порожнини та провідника, паралельні і знаходяться на відстані одна від одної. По провіднику тече струм, рівномірно розподілений по його перерізу з густиною . Знайти напруженість магнітного поля такого провідника.
10. Система складається із рівномірно зарядженої кулі радіуса та оточуючого середовища, заповненого зарядом з об’ємною густиною , де –  додатна величина,  *–* відстань від центра кулі. Знайти напруженість електричного поля системи.

**Заняття 7-8.** Коливання мембрани та пластини.

1. Знайти поперечні коливання мембрани еліпсоїдальної форми в центрі якої було вирізано квадрат (див. рис 1.1). Вважати *–*закріпленими. Продовження діагоналі квадрата до ділить мембрану на 2 рівні частини. На кожну з яких діє неперервно розподілена ортогональна до поверхні сила .

,

,

де , *–* довільні. Реакцією навколишнього середовища знехтувати.

Рис. 1.1 Рис. 1.2

1. Знайти поперечні коливання круглої мембрани по якій випадковим чином було розкидано *N* матеріальних точок. точок з масами . Вважати, що задане початкове відхилення, початкова швидкість рівна 0.
2. Знайти поперечні коливання прямокутної мембрани із закріпленим краєм та за наявності сили тяжіння, викликані початковим відхиленням

.

Реакцією зовнішнього середовища знехтувати. Додатково знайти аналітичний розв’язок і порівняти його з чисельним.

4. Знайти поперечні коливання неоднорідної круглої мембрани з закріпленим краєм (див рис 1.2), яка утворена з трьох однорідних мембран, якщо початкові поперечні відхилення задані. Припускаючи що зовнішнє середовище чинить супротив пропорційний швидкості.

5. Знайти поперечні коливання прямокутної мембрани із закріпленим краєм, викликані початковим відхиленням

,

припускаючи що зовнішнє середовище чинить супротив пропорційний .

6. Знайти поперечні коливання неоднорідної круглої мембрани з закріпленим краєм, отриманої з’єднанням однорідної круглої мембрани і однорідної кільцевої мембрани , якщо початкові поперечні відхилення задані.

7. Знайти коливання води у прямокутному резервуарі під дією змінного зовнішнього тиску на вільній поверхні:

, , ,

якщо глибина води в незбуреному стані рівна *h*. Функція .

8. Знайти коливання круглої мембрани радіуса із закріпленим краєм в середовищі без опору, викликані змінним тиском

прикладеного до однієї сторони мембрани.

9. Знайти поперечні коливання круглої мембрани з закріпленим краєм, припускаючи, що початкові відхилення мають форму параболоїда обертання, а початкові швидкості рівні .

10. Знайти поперечні коливання прямокутної пластинки з закріпленими краями в середовищі без опору, викликані ударом по центру пластини, що передав їй імпульс .

**Заняття 9.** Знаходження траєкторії руху частинок та променів.

Траєкторія руху частинки в полях.

1. Рівняння руху, що враховує втрати енергії заряду на випромінювання має вигляд

Знайти траєкторію частинки за умови, що

1. Заряд рухається в магнітному полі Землі. Вектор-потенціал , де µ – магнітний момент Землі. Знайти траєкторію руху частинки.
2. Знайти траєкторію руху матеріальної точки в центральному полі
3. Знайти траєкторію руху матеріальної точки в центральному полі
4. Знайти траєкторію руху матеріальної точки в центральному полі

6. Розглянути траєкторію руху релятивістської зарядженої частинки у взаємно перпендикулярних постійних однорідних електричному та магнітному полях*.* При частинка знаходилась в початку координат та мала швидкість .

7. Знайти траєкторію руху релятивістської частинки з зарядом *е*, маси *m* в полі нерухомого точкового заряду *q*.

8. Релятивістська заряджена частинка рухається в паралельних однорідних електричному та магнітному полях *.* При частинка знаходилась в початку координат і мала імпульс . Знайти траекторію руху частинки.

9. Знайти закон руху електрона в полі

і магнітному полі .

1. Знайти траєкторію руху заряду, що влітає під малим кутом до квадрупольної лінзи. Напруженість магнітного поля, створюваного лінзою:

Задачі геометричної оптики.

1. Побудувати хід променів при проходження світла через тонку сферичну лінзу з метаматеріалу.
2. Змоделювати роботу діелектричного дзеркала. Дослідити якість відбивання світла в залежності від кількості шарів.
3. Дослідити фокусування світла параболічним та сферичним дзеркалом.
4. Побудувати хід променів при проходженні світла через плоско-паралельну пластинку з неоднорідним показником заломлення.
5. Змоделювати рух паралельних променів світла в атмосфері Землі. (Показник заломлення залежить від відстані до центру сфери).
6. Змоделювати явище міражу. Показати проходження променя через середовище з неоднорідним показником заломлення.
7. Змоделювати фокусування об’єктів людським оком.
8. Показати відбивання та заломлення світла кристалом льоду в вигляді шестикутного стовпчика. Побудувати хід променів при падінні під різними кутами.
9. Обчислити набіг фази хвилі в рідкокристалічній комірці, використовуючи рівняння та граничні умови для кута переорієнтації директора нематичного рідкого кристала:

**Заняття 10.** Розв’язання задач з курсу квантова механіка.

Знайти декілька перших власних функцій та власних значень рівняння Шредінгера для потенціалу. Вважати, що – координати прямокутної декартової системи координат, а – це радіус сферичної системи координат.

1. .
2. .
3. .
4. .
5. .
6. .
7. .
8. .
9. .

При наявності особливості в точці ввести малий параметр.

**Заняття 11-12.** Додаткові задачі зі спецкурсів.

1. Змоделювати хід гаусового пучка світла в фокусуючому градієнтному світловоді.
2. Розглянути інтерференцію двох лінійно-поляризованих плоских хвиль в ізотропному середовищі, що розповсюджуються під невеликим кутом.
3. Розглянути проходження лінійно поляризованого світлового пучка з гаусовим розподілом інтенсивності через одновісний кристал в залежності від напрямку поляризації відносно осі кристалу.
4. Знайти переорієнтацію директора рідкого кристалу з жорстким зчепленням на стінках комірки під дією електричного поля прикладеного перпендикулярно до стінок комірки. Без поля орієнтація рідкого кристалу планарна.
5. Важка рідина густини знаходиться в циліндричній склянці з радіусом . В стані спокою висота рідини у стакані . Склянка обертається навколо своєї вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю . Вважаючи, що рух рідини встановився, знайти форму її вільної поверхні, мінімізувавши функціонал:

за умови сталого об’єму .

1. Між двома дротяними кільцями радіуса натягнута мильна плівка. Відрізок, що з’єднує центри кілець, є перпендикулярним до площини кілець і має довжину . Вважаючи товщину плівки сталою та малою, знайдіть рівняння поверхні, утвореної плівкою:

з умовою .

1. У прозорому середовищі зі змінним показником заломлення світло поширюється з точки в точку . Знайдіть траєкторію променя світла.
2. Провідна нестислива в’язка рідина знаходиться між двома провідними площинами . Площина рухається зі швидкістю в напрямку *Ox*. Однорідне магнітне поле направлено вздовж *Oz*, електричне поле вздовж *Oy*. Визначити розподіл швидкостей в рідині.

**Теми доповідей та рефератів.**

1. Інтерполяція за допомогою базових сплайнів.
2. Мінімізація функціонала методом Рітца.
3. Метод Бубнова-Гальоркіна.
4. Метод Ньютона-Рафсона для розв’язання систем лінійних та нелінійних рівнянь.
5. Приклад застосування методу cкінченних елементів в одномірному випадку.
6. Приклад застосування методу скінченних елементів в двовимірному випадку.
7. Стійкість та збіжність методу скінченних елементів.
8. Постобробка та представлення результатів в COMSOL Multiphysics.
9. Зв’язок COMSOL Multiphysics з іншими програмними продуктами (Excel, Matlab).
10. Мінімізація функціоналу довільної форми за допомогою модуля Mathematics (General form,Weak form).
11. Зв’язок між різними модулями при розв’язанні мультифізичних задач в COMSOL Multiphysics.

**Задачі, змодельовані в Comsol Multiphysics.**

Дані задачі розв’язані в програмному пакеті. Розібрати їх та змінити параметри задачі (вказані в завданні або на свій вибір).

1. Нагрівання в мікрохвильовій печі (Microwave Oven). Змінити геометрію об’єкта, що нагрівається на циліндр. Додати нагрівання тарілки.
2. Самофокусування гаусового пучка світла в середовищі (Self-Focusing). Змінити середовище на анізотропне.
3. Розсіяння Мі (Optical Scattering Off of a Gold Nanosphere).
4. Розсіяння на дифракційній гратці (Diffraction Grating). Зробити гратку плоскою, проникність за періодичним законом.
5. Зміна фокусної відстані спричинена нагріванням (Thermally Induced Focal Shift). Дослідити одну лінзу, спробувати інші типи лінз.
6. Охолодження у вакуумній флязі (Temperature Distribution in a Vacuum Flask). (Використовує Matlab).
7. Оптимізація процесу нагрівання (Optimizing a Thermal Process).
8. Охолодження електричної схеми (Heat Sink).
9. Електро-магнітна взаємодія двох паралельних провідників зі струмом (Electromagnetic Forces on Parallel Current-Carrying Wires). Знайти залежність сили взаємодії від відстані між провідниками. Зобразити магнітне поле 3 і 4 провідників зі струмом.
10. Електромагнітна левітація (An Electrodynamic Levitation Device). (Moving mesh).
11. Світловод (Transparent Light Pipe). Побудувати графік залежності коефіцієнта заломлення, спробувати свій варіант.
12. Моделювання роботи сонячної батареї (Si Solar Cell with Ray Optics).

**Приклади розв’язку, код та опис задачі до кожного з занять:**

**1.10**

**Програма в FlexPde**

{В таких дужках пишуть коментар.}

!Або потрібно на початку рядка поставити знак оклику

**TITLE 'series'** {Назва}

**COORDINATES** cartesian1 {В програмі використана декартова 1-вимірна система координат}

**DEFINITIONS** {В цьому розділі визначаються всі константи та функції, які використовуються в програмі}

lx=0.99

n=8 {Останній номер члена ряду, який врахований}

f=0.5\*ln((1+x)/(1-x)) {Функція,яку розкладають в ряд }

fn=SUM (i, 0, n, x^(2\*i+1)/(2\*i+1) ) {Сума ряду , . {Перший параметр функції SUM– індекс підсумовування, другий і третій – номер першого і останнього доданків, останній – і-й член ряду}

**BOUNDARIES**  {Тут описана геометрія задачі}

**REGION** **'def'**  {Область}

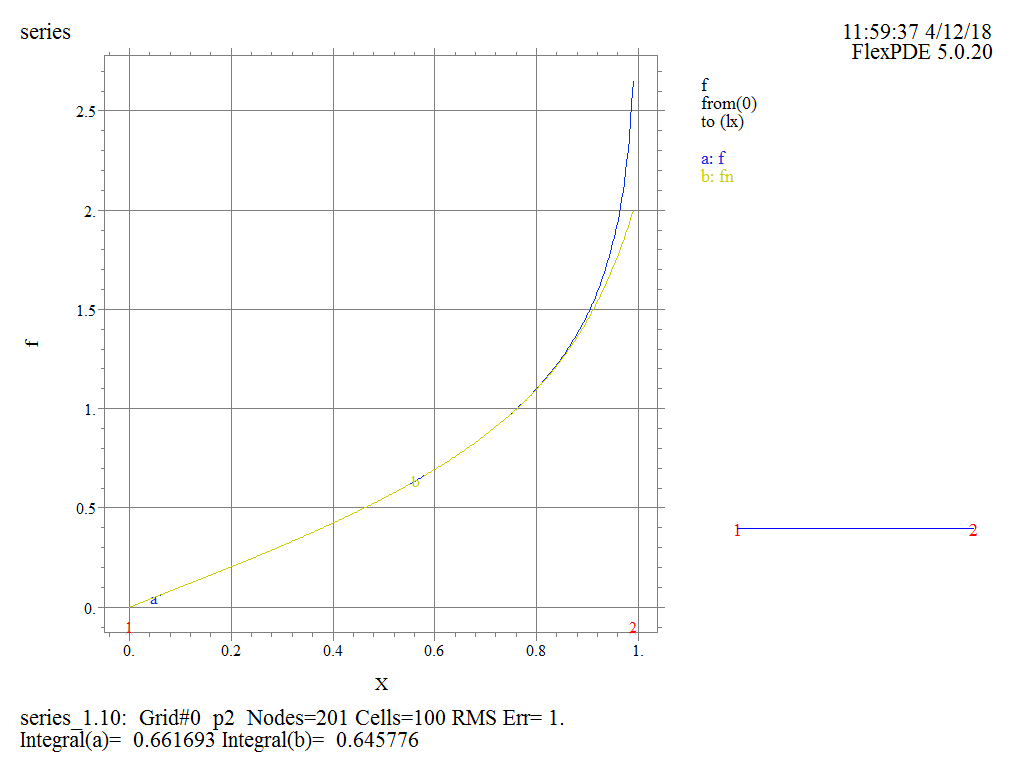
start (0) {Початкова точка}

line to (lx) {Кінцева точка}

**PLOTS** {Розділ відображення результатів}

Elevation (f,fn) from(0) to (lx) {Графік функції, та суми ряду до n-го члена}

**END**

****

### 2.10

**TITLE** **'Eigenvalue problem'**

**COORDINATES** cartesian2 {2-вимірна декартова система координат}

**VARIABLES** {Розділ, в якому перелічені невідомі функції}

u {Назва невідомої функції}

**SELECT** {Параметри методу}

modes=8 {Кількість власних функцій, які обчислює програма}

**DEFINITIONS {**В цьому розділі визначаються всі константи та функції, які використовуються в програмі}

R0=1

**EQUATIONS** {Рівняння поставленої задачі}

div(grad(u))+lambda\*u=0

**BOUNDARIES {**Тут описана геометрія задачі}

**REGION 1** {Область}

start (R0,0) {Початок обходу області}

point value(u)=0 {Задача, в якій є лише межові умови Неймана потребує фіксації значення функції в одній точці, щоб уникнути невизначеності}

natural (u)=0 {Умова Неймана}

arc(center=0,0) angle=360 {Границя області - коло з центром в т.(0,0), що проходить через точку,зазначену в команді start}

**PLOTS** {Розділ відображення результатів}

surface(u) {Графічне зображення власної функції в вигляді поверхні}

contour(u) {Контурний графік власної функції}

**END**

### D:\Svetochka\Work\Методичка_ Comsol\series_1.1001_08.png

### D:\Svetochka\Work\Методичка_ Comsol\series_1.1002_08.png

### 3.10

**TITLE 'stationar teplo'**

**COORDINATES** cartesian3 {3-вимірні задачі можна розв’язувати лише в декартовій системі координат}

**VARIABLES** {Розділ, в якому перелічені невідомі функції}

U {Назва невідомої функції

**DEFINITIONS {**В цьому розділі визначаються всі константи та функції, які використовуються в програмі }

a=1

h=2

r=sqrt(x^2+y^2)

f=abs(a-r)\*sin(Pi\*x)\*sin(Pi\*y)

**EQUATIONS** {Рівняння поставленої задачі}

div(grad(u))=0

**EXTRUSION**

surface z=0 {Фігура, визначена в області 1 витягається від поверхні z=0 до z=h}

surface z=h

**BOUNDARIES {**Тут описана геометрія задачі}

surface 1 value(u)=f {Визначення межових умов на нижній та верхній поверхнях}

surface 2 natural(u)=0

**REGION 1** {Область}

start (a,0) natural(u)=0 {Межова умова на бічній поверхні циліндра}

arc(center=0,0) angle=360

**PLOTS** {Розділ відображення результатів}

contour(u) on x=y surface(u) on x=y

contour(u) on y=0 surface(u) on y=0

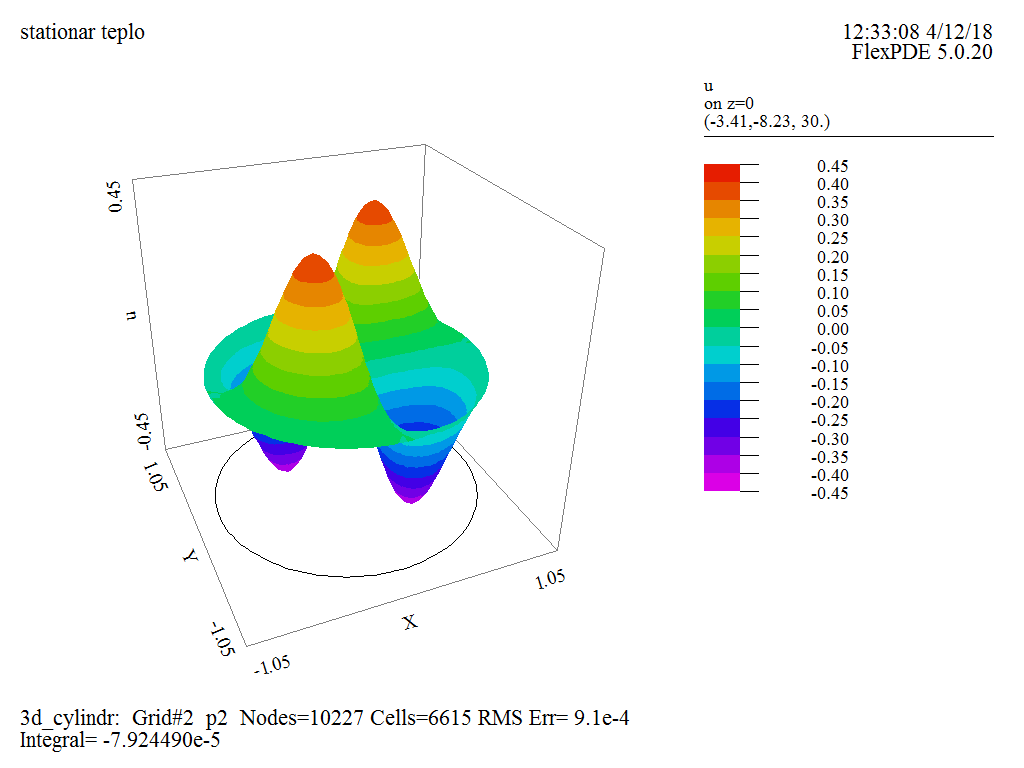
contour(u) on z=0 surface(u) on z=0

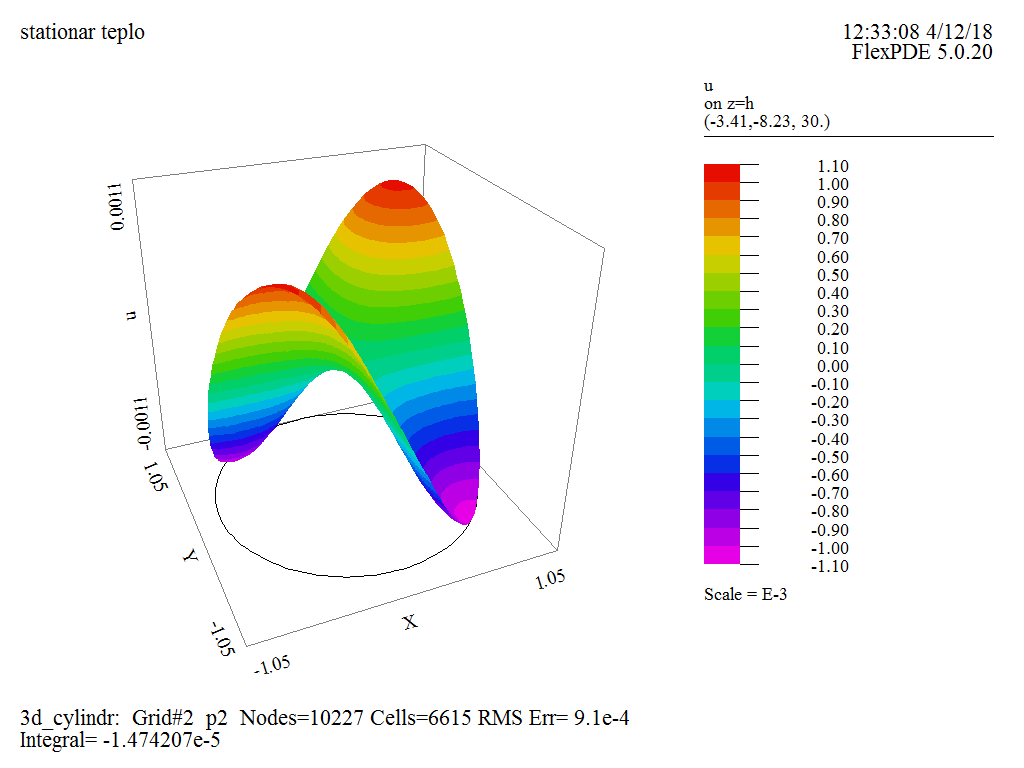
contour(u) on z=h/3 surface(u) on z=h/3

contour(u) on z=2\*h/3 surface(u) on z=2\*h/3

contour(u) on z=h surface(u) on z=h

**END**





**4.10**

**Фізична модель.**

Вважаємо, що яйце прогрівається лише внаслідок явища теплопровідності через шкаралупу. Оскільки білок і жовток – речовини в’язкі, конвекцією можна знехтувати. Повітряна бульбашка займає малий об’єм, тому там теж нехтуємо конвекцією. Шкаралупа яйця має товщину 0.2-0.4 мм і швидко прогрівається при опусканні яйця в киплячу воду і не робить помітного впливу на час приготування, тому ми не будемо ускладнювати задачу і знехтуємо шкаралупою. Найбільш складним є питання, як врахувати денатурацію білку при його прогрівання. Оскільки це демонстраційна задача, ми нехтуємо зміною коефіцієнтів при цьому процесі. Автори пропонують читачу вдосконалити програму і самостійно врахувати явище денатурації білку.

Таким чином ми маємо 3 області, в кожній з яких розв’язуємо рівняння теплопровідності:

,

де ρ – густина середовища, – питома теплоємність, – коефіцієнт теплопровідності.

Яйце ми опускаємо в киплячу воду, тому на зовнішній границі використовуємо граничну умову Діріхле: , на всіх внутрішніх границях використано умову неперервності похідної від температури по нормалі до поверхні.

**Програма в FlexPDE.**

{В таких дужках пишуть коментар.}

!Або потрібно на початку рядка поставити знак оклику.

**TITLE 'Egg'** {Назва}

**COORDINATES** ycylinder {Система координат: 1D,2D,3D. В програмі використана циліндрична система координат з аксіальною симетрією вздовж осі у.}

**VARIABLES** {Невідома функція, або декілька}

**u** {Має бути стільки, скільки рівнянь.}

**SELECT** {Налаштування, які відносяться до програми в цілому: параметри методу, точність, параметри для побудови графіків та інше.}

GRIDLIMIT=4

errlim=1e-3

CONTOURS=7

**DEFINITIONS** {Присвоєння значень для параметрів, використаних в задачі. Тут можна також визначати функції.}

r0=0.02 {Менший радіус яйця}

rge=0.6\*r0 {Радіус жовтка, можемо змінювати для C0,C1,C2}

a=1.3 {Параметр асиметрії яйця}

rho\_g=1050 rho\_b=1060 rho\_a=1.2 {Густина жовтка,білка,повітря відповідно}

c\_g=2710 c\_b=3560 c\_a=1008 {Питома теплоємність}

k\_g=0.31 k\_b=0.58 k\_a=0.027 {Коефіціент теплопровідності}

rho=rho\_b c=c\_b k=k\_b {Величини, які використовуються для обчислення рівняння, за замовчуванням}

u0=273.15 T100=273.15+100

**INITIAL VALUES** {Початкове значення шуканої функції. У стаціонарних задачах у цьому розділі пишуть нульове наближення.}

u=u0+20

**EQUATIONS**  {Рівняння. Для системи перед кожним рівнянням через двокрапку пишуть змінну з «VARIABLES»}

div(k\*grad(u))=rho\*c\*dt(u) {Рівняння теплопровідності}

**BOUNDARIES** {Геометрія задачі. Кожна наступна область заперечує попередню, якщо вони перетинаються}

REGION 'b' {Найбільша область}

START(0,-r0) {Початок обходу області} value(u)=T100 {Межова умова, яка діє від попередньої до наступної точки}

arc(center=0,0) {Частина дуги кола з центром в т(0,0)} angle=90 {Цей параметр допомагає, якщо дугу можна провести неоднозначно} to (r0,0) {Кінцева точка дуги} value(u)=T100 {Межова умова Діріхле}

arc(center=0,0) to (0,a\*r0) {Якщо радіуси різні, програма автоматично будує еліпс} natural(u)=0 {Однорідна умова Неймана} line to CLOSE

REGION 'g' rho=rho\_g c=c\_g k=k\_g {Жовток, пере визначаємо параметри рівняння}

START(0,-rge) natural(u)=0

arc(center=0,0) angle=180 to (0,rge) natural(u)=0 line to CLOSE

REGION 'air' rho=rho\_a c=c\_a k=k\_a

start (0,-0.8\*r0) line to (0,-r0) natural(u)=0 arc(center=0,0) to (r0\*sqrt(1-0.9^2),-0.9\*r0) arc(radius=r0) to close

**TIME 0 TO 900 by 300** {Для яких значень часу буде розв’язана задача}

**MONITORS** {Відображає графіки функції в процесі розрахунків. Якщо задача довго рахує, можна контролювати, що відбувається}

!contour(u-u0) painted

**PLOTS** {Виведення результатів обчислень}

for t=300 by 300 to 300

contour(u-u0) {Контурний графік в 2-вимірній оласті}

contour (error) painted {Відображає похибку обчислень}

grid(r,z) {Зображення розбиття досліджуваної області} zoom (0.2\*r0,-r0,0.4\*r0,0.4\*r0) {Застосовується, якщо потрібно більш детально показати якусь частину графіка. Перші два числа – координати лівого нижнього кута прямокутника, потім його ширина та висота.}

elevation(u-u0) from (0,0) to (r0,0) {Переріз поверхні функції вздовж відрізку між зазначеними точками}

for t=900 by 300 to 900

contour(u-u0) CONTOURS = 5 {Якщо потрібно змінити параметри відображення лише одного графіка, вони записуються відразу після відповідної команди}

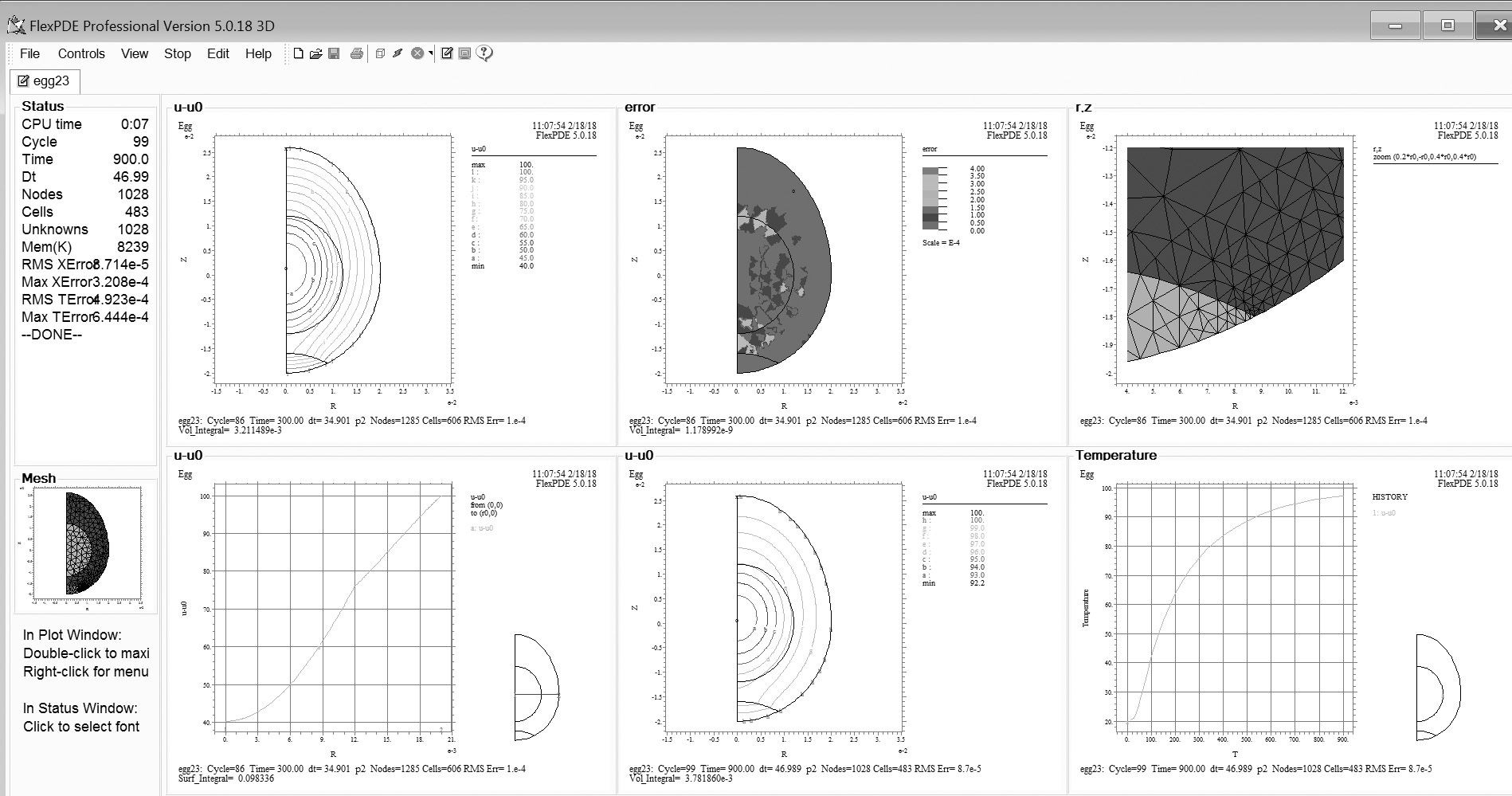
**histories** {Виведення результатів обчислень для різних моментів часу}

history(u-u0) at (rge,0) as "Temperature" BMP {Записує графік залежності температури на краю жовтка від часу в файл з розширенням BMP, при цьому вісь ординат підписана як «Temperature»}

history(u-u0) at (rge,0) export format "#t#b#1" file="temperature.txt" {Виводить таблицю залежності температури на краю жовтка від часу в файл з назвою temperature.txt. Значення групуються в стовпчики: #t – час, #b - табуляція, #1- значення функції}

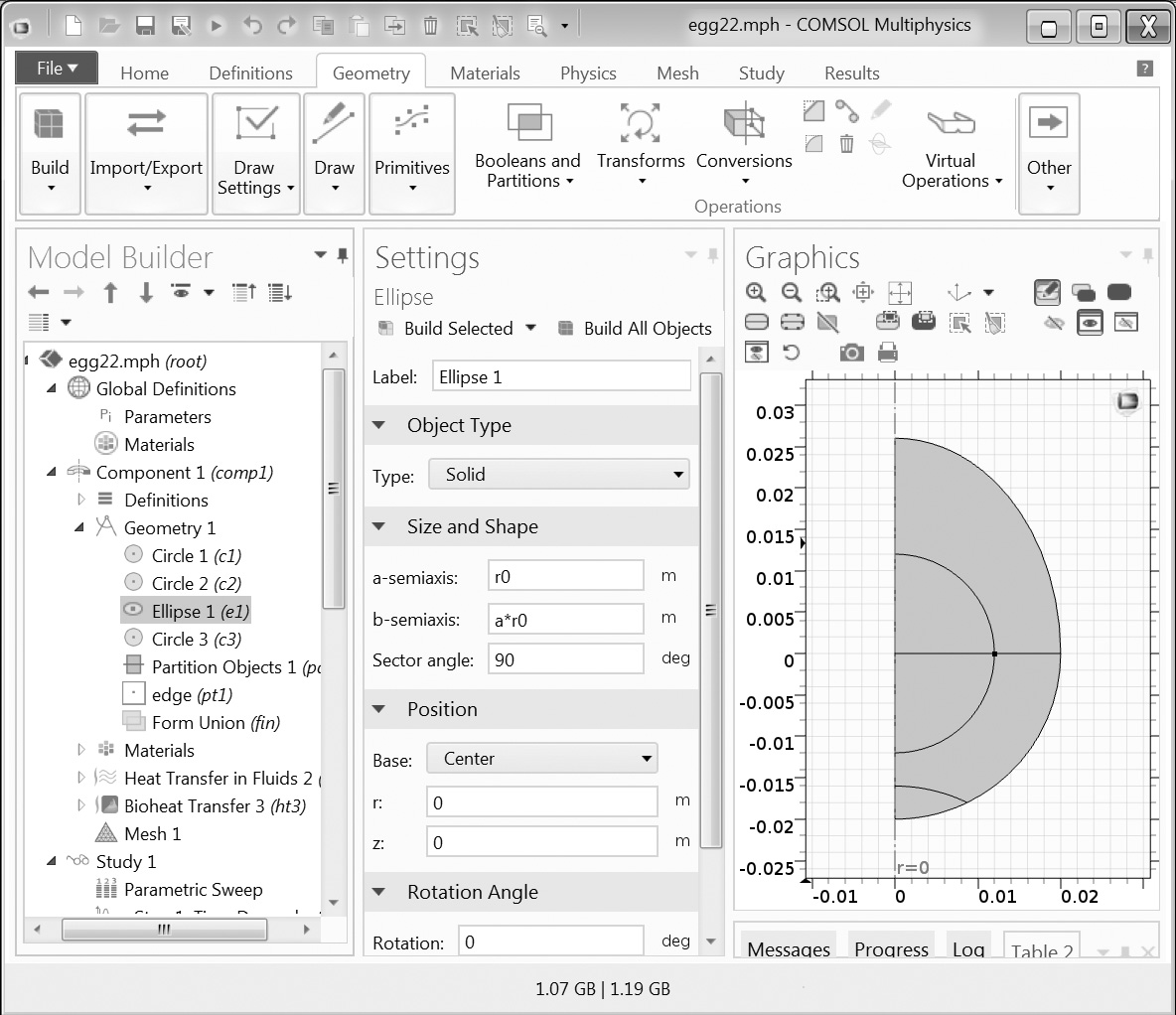
**END**

egg2306_001

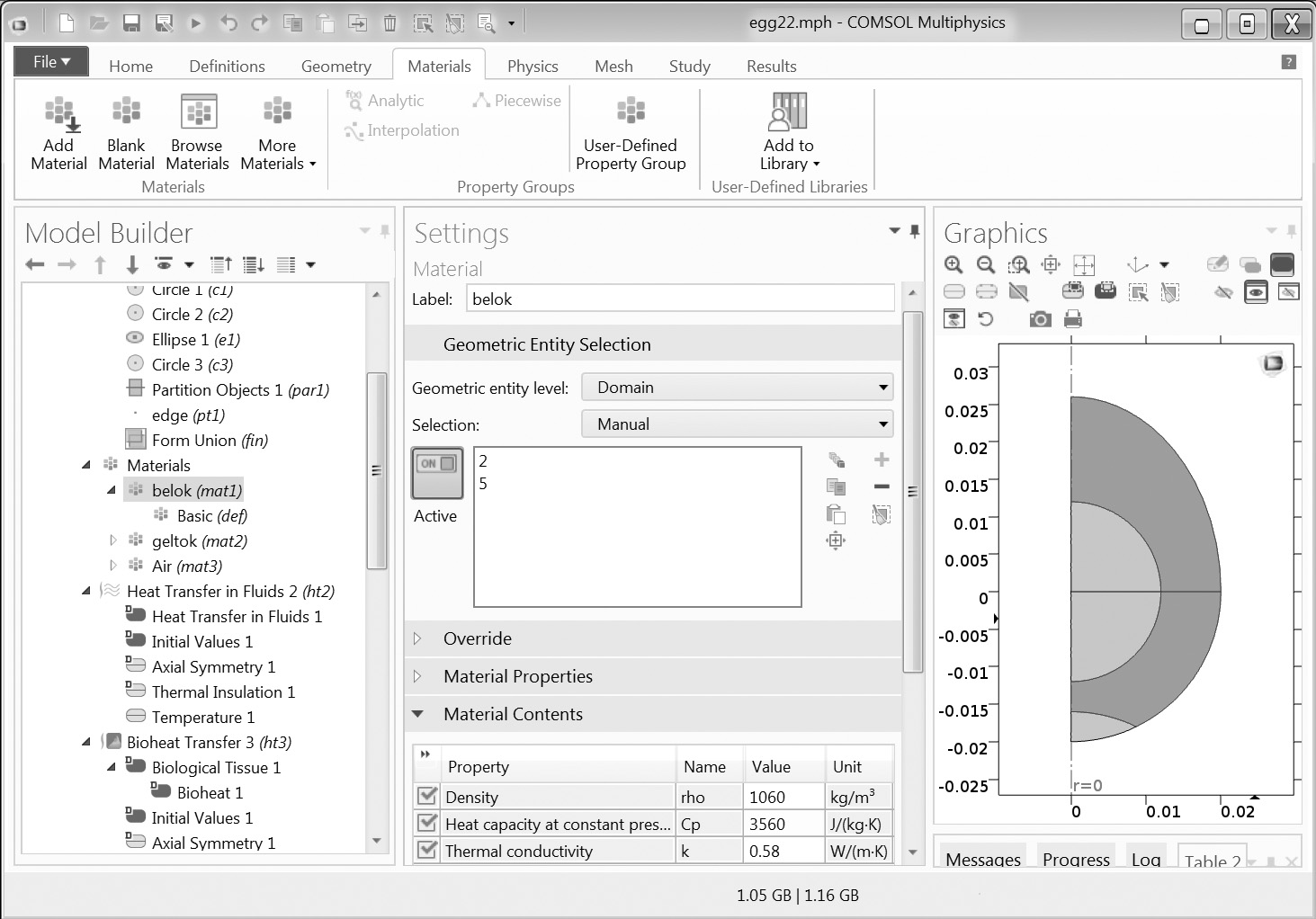


**Розв’язання задачі в Comsol.**

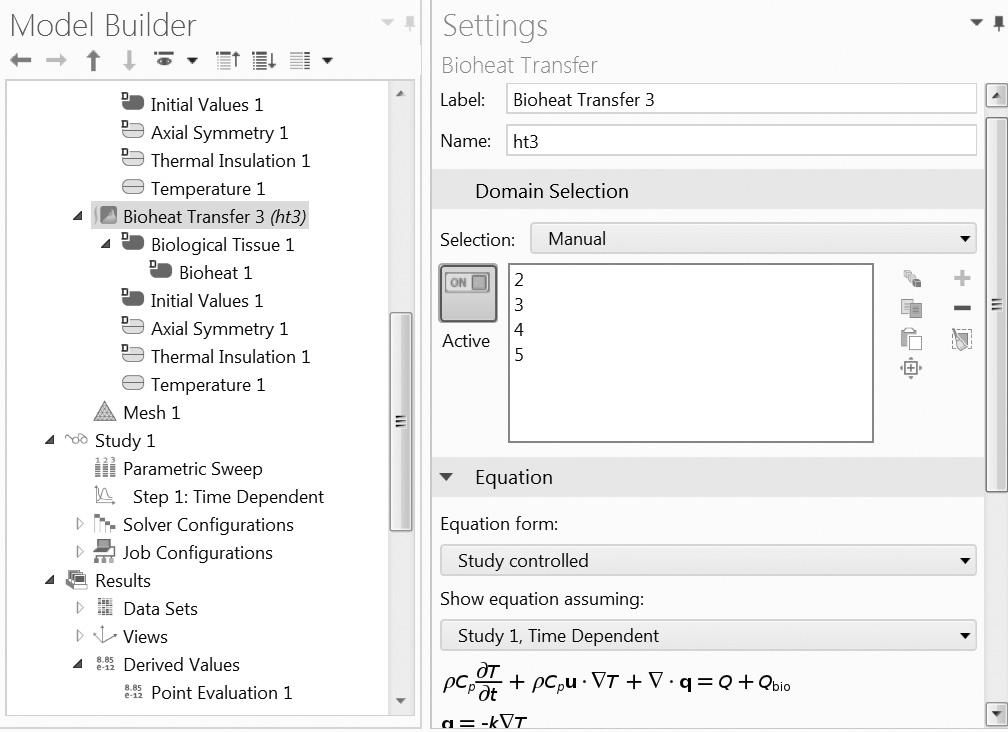
1. Шлях побудови моделі.
2. Створити новий файл (New) -> Model Wizard, вибрати 2-вимірну задачу з акіальною симетрією (2D Axisymmetric), вибрати розділ фізики: теплопровідність (Heat Transfer), Add ->Study, зазначити, що розв’язується задача, залежна від часу (Time Dependent) ->Done.
3. Global Definitions -> (правою кнопкою миші) Parameters. Записуємо всі параметри, потрібні для побудови геометрії. Значення можна задавати в будь-яких одиницях, які потрібно прописати в квадратних дужках після значення параметра.
4. Створюємо область. Geometry->Draw->Circle. Малюємо чверть великого круга з центром в початку координат. Потім пів круга меншого радіуса (це буде жовток) і чверть еліпса. Щоб зробити повітряну бульбашку, малюємо коло з центром нижче по осі z, потім за допомогою логічних операцій відділяємо частину, яка перетинається з яйцем (Booleans and Partition -> Partition Objects. Object to partition - це те, що потрібно розбити на окремі області, Tool objects - те, чим ми розділяємо.).

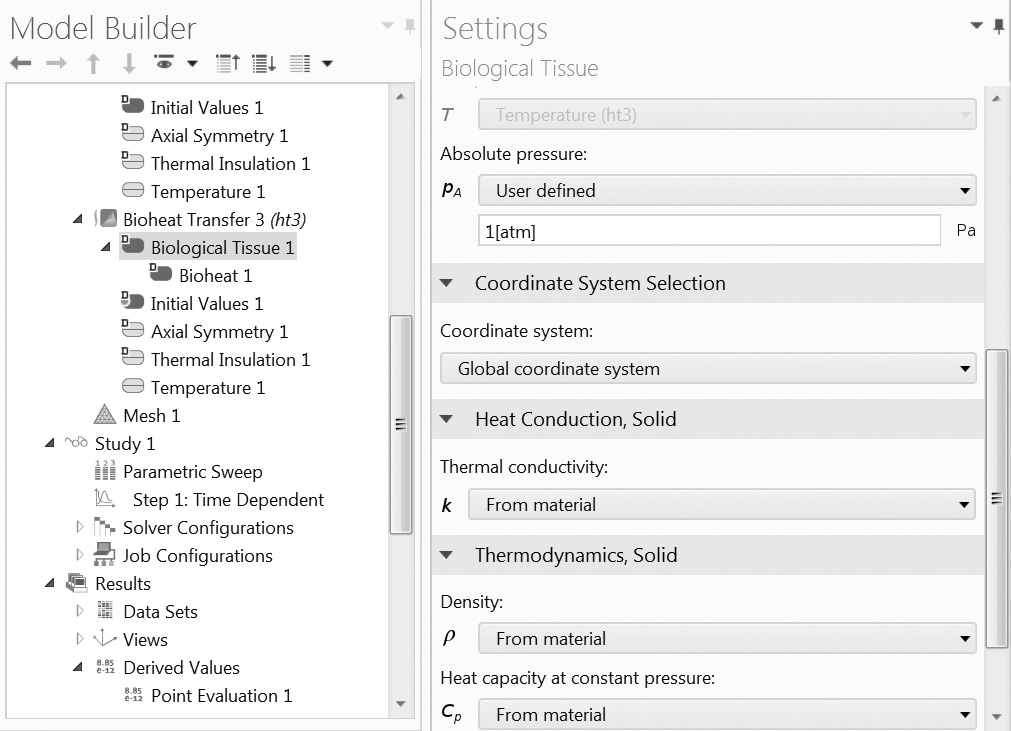


1. Позначимо, яка область відповідає якому матеріалу. Повітря є в біблітеці матеріалів, додаємо його звідти: Add Material -> Liquids and Gases ->Gases -> Air -> Add to Selection. Далі нажимаємоаємо зліва Air та вибираємо потрібну область на малюнку. Щоб означити білок та жовток, потрібно створити новий матеріал (Blank Material) та внести потрібні в рівнянні величини вручну.

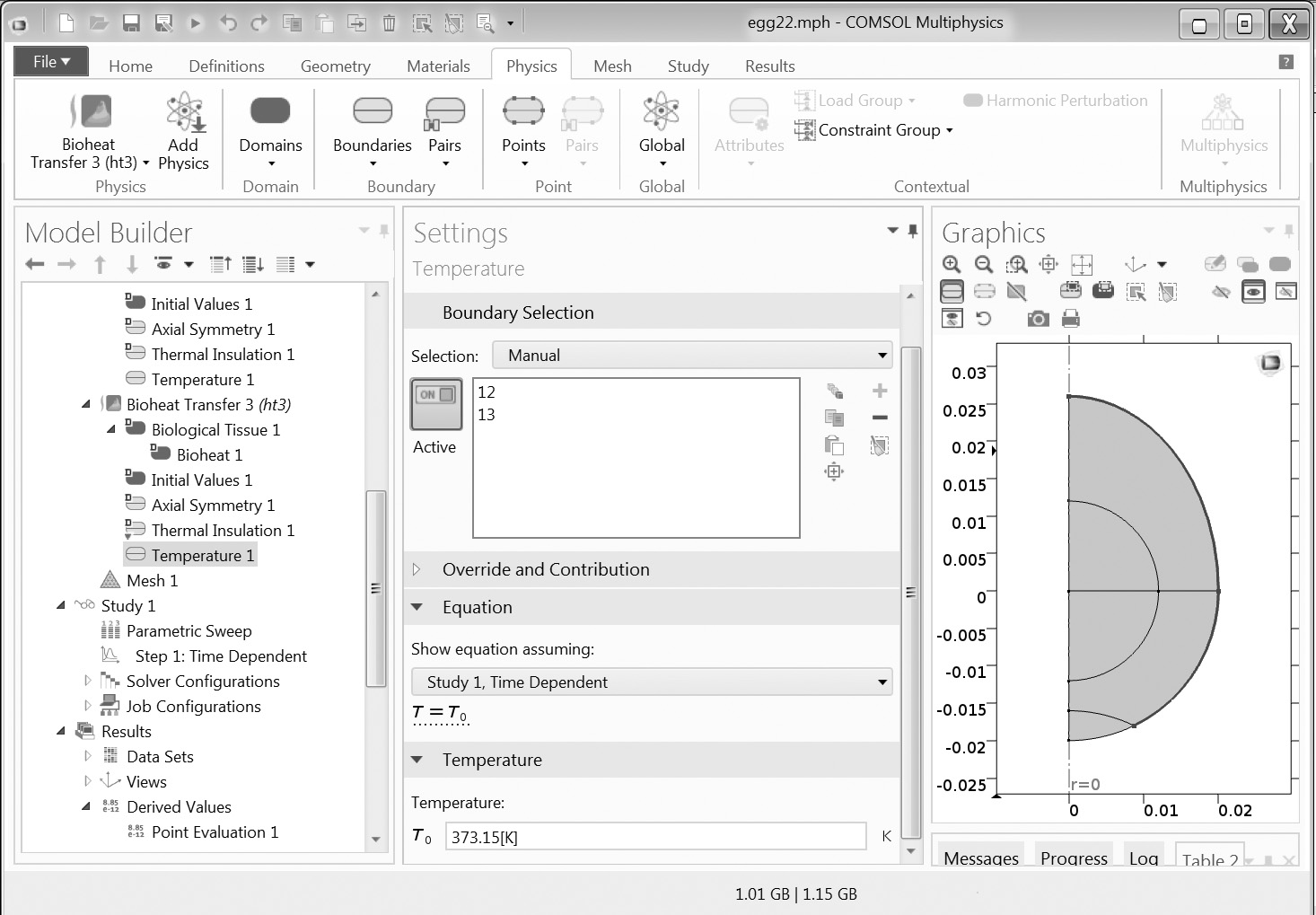


1. Ми вже вибрали рівняння, яке буде розвязане. Можна для повітряної бульбашки додати своє рівняння Physics -> Add Physics -> Heat transfer in Fluids -> Add to Selection.

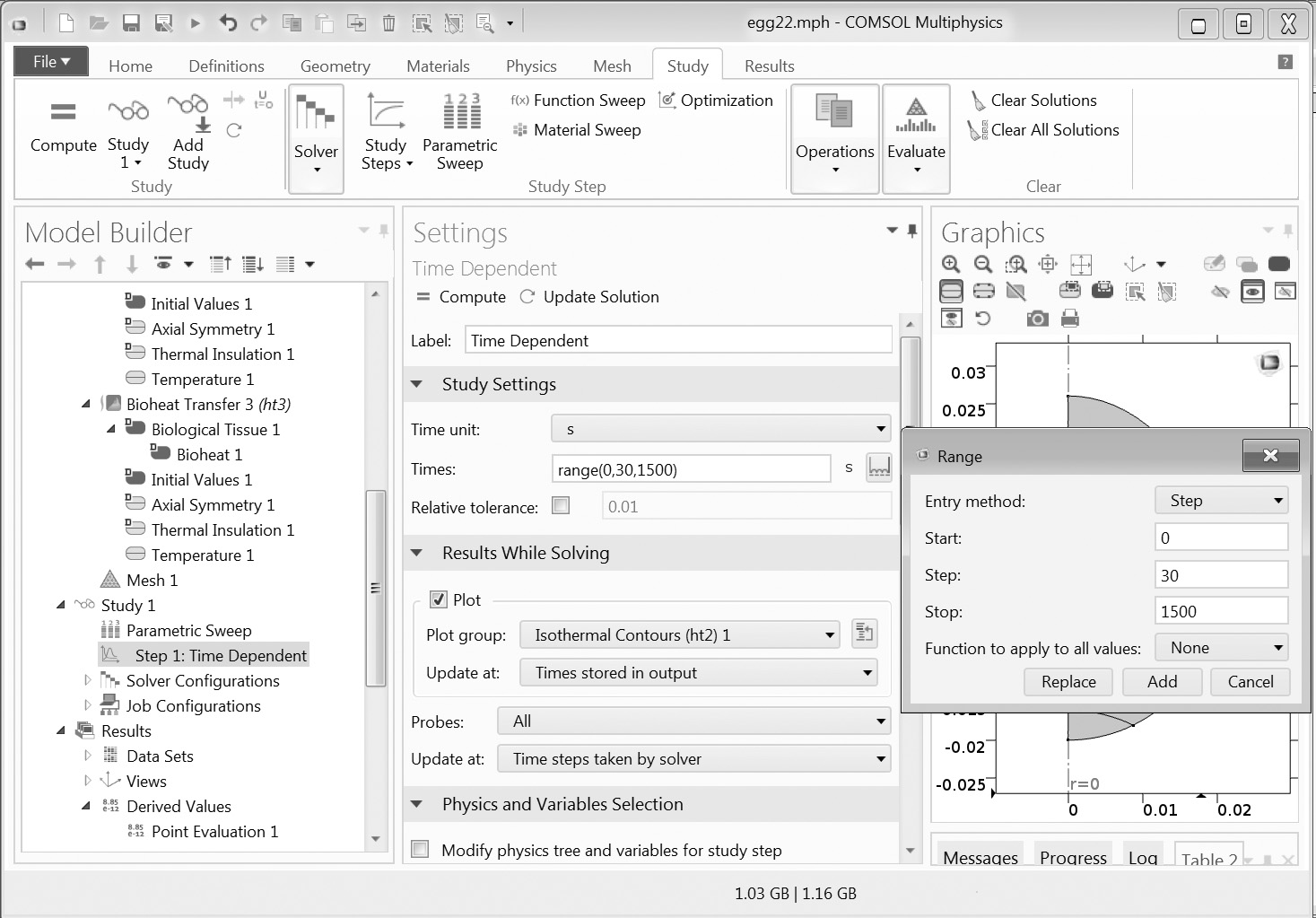




1. За замовчуванням граничні умови на всіх границях – однорідні умови Неймана. Перепозначимо граничні умови на зовнішніх границях. Для цього вибираємо Physics -> Boundaries -> Temperature. Далі потрібно зазначити, на яких саме границях температура підтримується постійною і вписати, чому вона дорівнює.

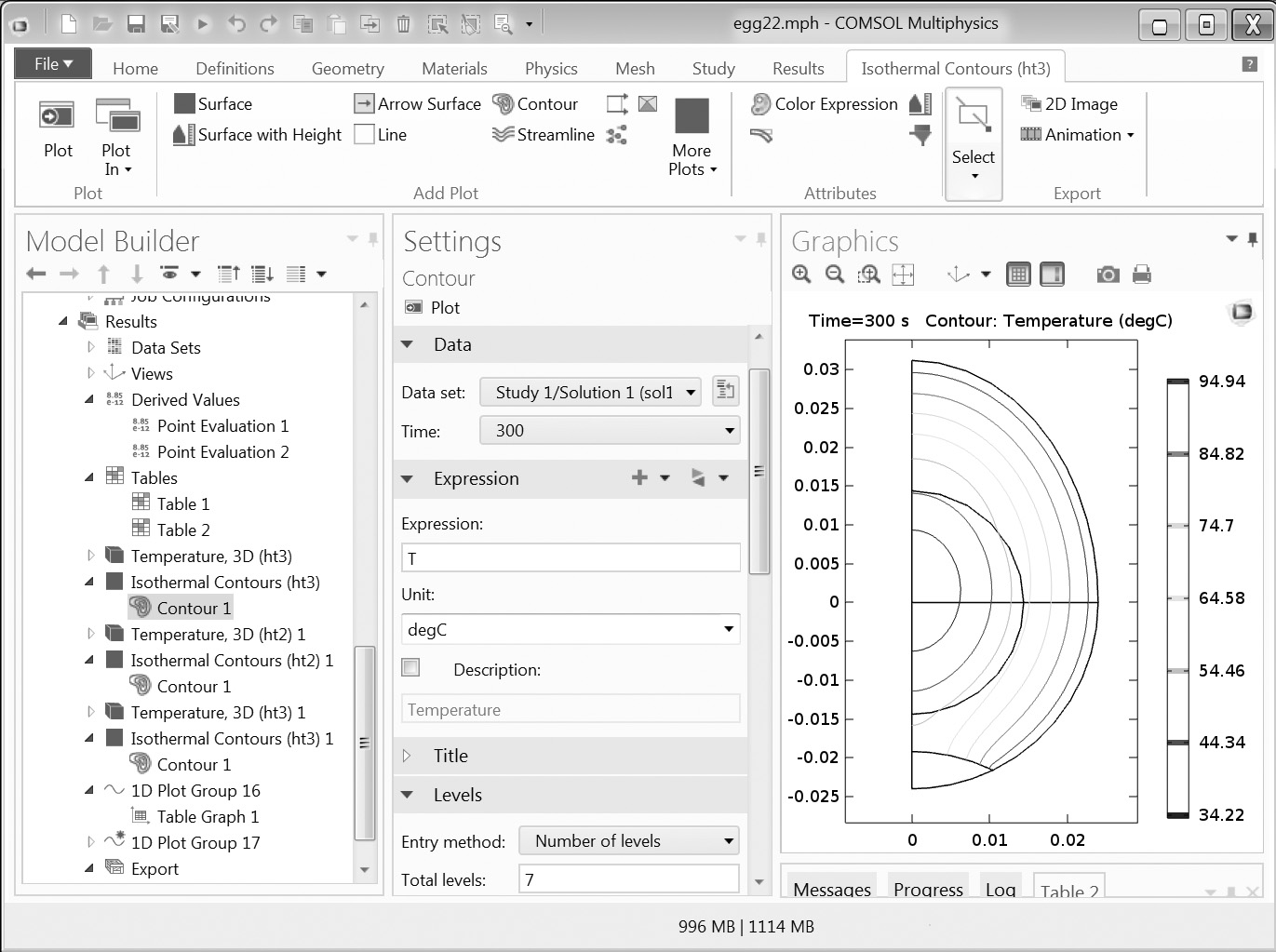


1. В розділі Mesh можна змінити параметри триангуляції областей, та їх розбиття в ході покращення точності шуканого розвязку. Як правило, вибрані програмою параметри (Physics Control Mesh) добре працюють і можна змінювати лише величину елементів (Element Size) для покращення точності розрахунків.
2. В розділі Study можна вибрати, яке саме дослідження вимагається. Ми вже вибрали розв’язання задачі, залежної від часу.



До цього можна додати інші варіанти розв’язку, наприклад, обчислити її кілька раз для різних значень радіуса яйця (Parametric Sweep).

1. Графіки.



### 5-6.10

**TITLE 'electrostatics'** { Назва прграми}

**COORDINATES** sphere1 {У програмі використана циліндрична система координат}

**VARIABLES** {Розділ, в якому перелічені невідомі функції}

u

**SELECT** {Точність, поставленої задачі}

errlim=1e-5

**DEFINITIONS** {У цьому розділі визначаються всі константи та функції, які використовуються в програмі}

R0=0.1

k=10

ro0=0.2

alfa=2\*R0\*ro0/3

eps0=8.85e-12

ro=ro0

E=-grad(u)

Et=IF r<R0 THEN ro0\*r/3/eps0 ELSE (R0^3\*ro0/3/r^2+alfa/2-alfa\*R0^2/2/r^2)/eps0 {Аналітичний розв’язок задачі}

**EQUATIONS** {Рівння}

div(grad(u))=-ro/eps0

**BOUNDARIES** {Геометрія задачі. Кожна наступна область заперечує попередню, якщо вони перетинаються }

**REGION 1**

start (0)

line to (R0)

**REGION 2** ro=alfa/r {Перевизначення густини заряду в 2й області}

start (R0)

line to (k\*R0) point value(u)=0 {Нескінченність замінюється на досить велике значення}

**PLOTS** {Виведення результатів обчислень}

elevation(u) from (0) to (k\*R0)

elevation (E) from (0) to (k\*R0)

elevation (E,Et) from (0) to (k\*R0)

**END**

### D:\Svetochka\Work\Методичка_ Comsol\electric_1r_4.1002.png

### 7-8.10

**TITLE 'plate'**

**COORDINATES** cartesian2

**VARIABLES**

u1(threshold=10) u2(threshold=10)

**DEFINITIONS**

lx=1 ly=2

v=1

I=10

eps=0.01\*lx {Дельта-функцію моделюємо прямокутником товщини 2\*eps}

**INITIAL VALUES**

u1=0 {Початкове відхилення}

u2=I\*upulse(x-(lx/2-eps),x-(lx/2+eps))\*upulse(y-(ly/2-eps),y-(ly/2+eps)) {Початкова швидкість}

**EQUATIONS** {Другу похідну по часу не можна записати в межах пакету, тому рівняння коливання переписується в вигляді системи 2 рівнянь з першими похідними по часу}

u1: dt(u2)=v^2\*div(grad(u1))

u2: u2=dt(u1)

**BOUNDARIES**

**REGION 1**

start (0,0) value(u1)=0

line to (lx,0) value(u1)=0 line to (lx,ly) value(u1)=0 line to (0,ly) value(u1)=0 line to close

**TIME 0 TO 1 BY 0.1**

**PLOTS**

for t=0.1 by 0.1 to 0.1

contour (u1)

for t=0 by 0.1 to 1

contour(u1)

surface (u1)

### END

### D:\Svetochka\Work\Методичка_ Comsol\kolyv_2d_7.1003.png

### 9.10 (2)

### TITLE 'Liquid crystall' {Програма для розрахунку кута відхилення директора}

### COORDINATES YCYLINDER

### SELECT

### spectral\_colors AUTOSTAGE=ON

### errlim=1.e-5

### VARIABLES

### Theta {Кут відхилення директора рідкого кристала від осі z}

### DEFINITIONS

### K=6.4e-12 {Пружна стала}

### W=1.e-7 {Енергія зчеплення рідкого кристалу з поверхнею Дж/м^2}

### Lambda=0.47e-6 {Довжина хвилі тестового світлового пучка}

### L=6.0e-5 {Товщина комірки рідкого кристалу}

### R\_0=0.5e-3

### R0=3\*R\_0

### A=pi/180\*45

### n\_o=1.532

### n\_e=1.707

### Theta1=A\*exp( -(2\*R^2)\*(R0/R\_0)^2) !Кут переднахилу директора на нижній границі

### DTheta\_z=dz(Theta)

### 

### INITIAL VALUES

### Theta=0. ! Початкове наближення невідомої функції

### EQUATIONS

### Theta: K\*(dz(DTheta\_z)/L^2)=0

### BOUNDARIES

### region 'domain'

### start (0,0) natural(Theta)=-W\*L/K\*sin(Theta)\*cos(Theta)

### line to (1,0) Natural(Theta)=0

### line to (1,1) Value(Theta)=Theta1

### line to (0,1) Natural(Theta)=0

### line to close

### 

### MONITORS

### elevation( Theta) from (0,0) to (0,1)

### elevation( Theta) from (1/2,0) to (1/2,1)

### elevation(Theta) from (0,1/2) to (1,1/2)

### 

### PLOTS

### grid(R,z)

### elevation( Theta) from (0,0) to (0,1)

### elevation( Theta) from (1/2,0) to (1/2,1)

### elevation(Theta) from (0,1/2) to (1,1/2)

### surface(Theta)

### 

### summary

### report('Program for Theta and U supposing angle Phi=0 and neglecting derivatives in x, and y') report('Finite anchoring at top substrate')

### report(L) report(K) report(W) report(Lambda)report(n\_e)report(n\_o)

### transfer(Theta) file="theta\_K.dat" {Ця команда експортує геометрію задачі та розбиття областей в окремий файл " theta\_K.dat". Це потрібно для наступної програми, яка рахує набіг фаз в комірці рідкого кристалу з неоднорідним розподілом директору, порахованим в цій програмі.}

### elevation( Theta) from (0,0) to (0,1)

### elevation(Theta) from (0,1) to (1,1) export format "#x#b#1" file="Theta\_2D.dat"

### END

### D:\Svetochka\Work\Методичка_ Comsol\K11.png

### D:\Svetochka\Work\Методичка_ Comsol\K08.png

### TITLE 'phase' {Розрахунок набігу фаз при проходженні світла через комірку рідкого кристалу}

### COORDINATES ycylinder

### SELECT

### errlim=1.e-5

### VARIABLES

### Retardation

### DEFINITIONS

### n\_o=1.532

### n\_e=1.707

### Lambda=0.47e-6

### L=6.0e-5

### R\_0=0.5e-3

### R0=3\*R\_0

### transfermesh('theta\_K.dat',Theta) {Імпорт кута відхилення директора з попереднього файла}

### n\_eff(R,z)=n\_o\*n\_e/sqrt(n\_e^2\*(sin(Theta))^2+n\_o^2\*(cos(Theta))^2) {Ефективний показник заломлення}

### EQUATIONS

### Retardation: dz(Retardation)=2\*pi\*L/Lambda\*(n\_e-n\_eff(R,z))

### BOUNDARIES

### region 'domain'

### start (0,0) value(Retardation)=0

### line to (1,0) natural(Retardation)=0

### line to (1,1) natural(Retardation)=0

### line to (0,1) natural(Retardation)=0

### line to close

### 

### MONITORS

### elevation(Retardation) from (0,1) to (1,1)

### 

### PLOTS

### elevation(Retardation) from (0,1) to (1,1)

### elevation( Theta) from (0,0) to (0,1)

### elevation( Theta) from (1/2,0) to (1/2,1)

### elevation(Theta) from (0,1/2) to (1,1/2)

### surface(Theta)

### elevation(Retardation) from (0,1) to (1,1)

### Table(Retardation) export format "#b#1" points=21 file="Ress\_Retardation.txt" as "Ress\_Retardation"

### END

### D:\Svetochka\Work\Методичка_ Comsol\K_phase08.png

### 10.10

**TITLE 'kvm'**

**COORDINATES** sphere1

**VARIABLES**

Psi

**SELECT**

errlim = 1e-4

modes=5

**DEFINITIONS**

R0=200

e=1

V=-e^2/r

**EQUATIONS**

Psi: div(grad(Psi)) -V\*Psi + lambda\*Psi = 0

**BOUNDARIES**

**REGION 1**

start (0)

line to (R0)

**PLOTS**

elevation (Psi) from (0) to (R0)

**summary**

report lambda

**END**

### D:\Svetochka\Work\Методичка_ Comsol\kvant_10.1001_01.png

### D:\Svetochka\Work\Методичка_ Comsol\kvant_10.1001_03.png

### Рекомендована література

1. Амосов А.А, Дубинський Ю.А, Копченова Н.В. Обчислювальні методи для інженерів: Учеб. посібник. - М.: Вищ. шк., 1994. — 544 с.
2. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. — М.: Мир, 1981. — 305 с ..
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. - М.:Мир, 1979. —392 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.:Мир, 1975. — 318 с.
5. Деклу Ж. Метод конечных элементов. — М.: Мир, 1976. — 96 с
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 636 с.
7. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
8. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. - М.: Мир, 1988. — 352 с.
9. Backstrom G. Simple fields by finite element analysis. – GB Publishing, 2005. – 72p.
10. [www.comsol.ru](http://www.comsol.ru)

**Використана література**

1. [**"Методи математичної фізики: методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи для студентів фізичного факультету"**/ Упорядник В.М.Хотяїнцев. - Київ: ВПЦ "Київський університет", 2010. —56](http://theory.phys.univ.kiev.ua/system/files/users/shared/methmathphys_khotyaintsev_2011_02_10.pdf)c.
2. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. – М.: Высшая школа,1984.
3. Иродов И.Е. Основные законы электро-магнетизма. . – М.: Высшая школа,1991.